模块二 函数四类基本题型

第 1 节 指数、对数函数的基本运算与图象性质（★★）

强化训练

1．（2023•湖南邵阳模拟•★）$(\frac{2}{\sqrt{3}})^{-2}+(\sqrt{5}-\pi)^{0}-(\frac{49}{16})^{\frac{1}{2}}=$______.

答案：0

解析：原式$=[(\frac{\sqrt{3}}{2})^{-1}]^{-2}+1-[(\frac{7}{4})^{2}]^{\frac{1}{2}}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2}+1-\frac{7}{4}=0$.

2．（2023•浙江宁波模拟•★★）$(\log_{4}3+\log_{8}3)(\log_{3}2+\log_{9}2)+(\frac{64}{27})^{-\frac{1}{3}}=$______.

答案：2

解析：观察发现几个底数满足$4=2^2$，$8=2^3$，$9=3^2$，故用性质$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$来化简，

原式$=(\log_{2^2}3+\log_{2^3}3)(\log_{3}2+\log_{3^2}2)+[(\frac{4}{3})^{3}]^{-\frac{1}{3}}$

$=(\frac{1}{2}\log_{2}3+\frac{1}{3}\log_{2}3)(\log_{3}2+\frac{1}{2}\log_{3}2)+(\frac{4}{3})^{-1}$

$=\frac{5}{6}\log_{2}3\times\frac{3}{2}\log_{3}2+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\log_{2}3\times\frac{1}{\log_{2}3}+\frac{3}{4}=2$.

3．（2023•福建莆田模拟•★★）$(\lg 5)^{2}+\lg 2\times\lg 5+\lg 20+\log_{2}25\times\log_{3}4\times\log_{5}9=$______.

答案：10

解析：前三项底数都为 10，先计算这三项，

$(\lg 5)^{2}+\lg 2\times\lg 5+\lg 20=\lg 5\times(\lg 5+\lg 2)+\lg 20$

$=\lg 5\times\lg 10+\lg 20=\lg 5+\lg 20=\lg(5\times 20)=2$，

最后一项的三个对数底数不同，考虑化同底，

$\log_{2}25\times\log_{3}4\times\log_{5}9=\frac{\ln 25}{\ln 2}\times\frac{\ln 4}{\ln 3}\times\frac{\ln 9}{\ln 5}=\frac{2\ln 5}{\ln 2}\times\frac{2\ln 2}{\ln 3}\times\frac{2\ln 3}{\ln 5}=8$，

所以原式$=2+8=10$.

4．（2023•全国模拟•★★）已知$\log_{a}3=m$，$\log_{a}4=n$，则$a^{2m-n}=$______.

答案：$\frac{9}{4}$

解析：要求的是指数式，故将条件的对数式化为指数式，

$\log_a 3=m\Rightarrow a^m=3$，$\log_a 4=n\Rightarrow a^n=4$，所以 $a^{2m-n}=\dfrac{a^{2m}}{a^n}=\dfrac{(a^m)^2}{a^n}=\dfrac{3^2}{4}=\dfrac{9}{4}$.

5.（★★★）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，若实数 a 满足 $f(2^{\log_3 a})>f(-\sqrt{2})$，则 a 的取值范围是_____.

答案：$(0,\sqrt{3})$

解析：已知的是 $(-\infty,0]$ 上的单调性，故用奇偶性把 $f(2^{\log_3 a})$ 的自变量化到 $(-\infty,0]$ 上来，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(2^{\log_3 a})=f(-2^{\log_3 a})$，故 $f(2^{\log_3 a})>f(-\sqrt{2})\Leftrightarrow f(-2^{\log_3 a})>f(-\sqrt{2})$ ①，

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上↗，所以不等式①等价于 $-2^{\log_3 a}>-\sqrt{2}$，从而 $2^{\log_3 a}<\sqrt{2}$，故 $2^{\log_3 a}<2^{\frac{1}{2}}$，

所以 $\log_3 a<\dfrac{1}{2}=\log_3\sqrt{3}$，故 $0<a<\sqrt{3}$.

6.（2023·云南模拟·★★★）函数 $f(x)=(\log_4\dfrac{x^2}{2})\cdot(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x}{8})$ 的最大值为_____.

答案：$\dfrac{25}{16}$

解析：观察发现两个底数都与 2 有关联，不妨先将底换成 2，统一起来，

由题意，$f(x)=(\log_4\dfrac{x^2}{2})\cdot(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x}{8})=(\log_{2^2}\dfrac{x^2}{2})\cdot(\log_{2^{-1}}\dfrac{x}{8})=\dfrac{1}{2}(\log_2\dfrac{x^2}{2})\cdot(-\log_2\dfrac{x}{8})=-\dfrac{1}{2}(2\log_2 x-1)(\log_2 x-3)$，

含 x 的部分以 $\log_2 x$ 的形式整体出现，可换元，

令 $t=\log_2 x$，则 $t\in\mathbf{R}$，且 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(2t-1)(t-3)=-\dfrac{1}{2}(2t^2-7t+3)=-t^2+\dfrac{7}{2}t-\dfrac{3}{2}=-(t-\dfrac{7}{4})^2+\dfrac{25}{16}$，

所以当 $t=\dfrac{7}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{25}{16}$.

7.（2023·四川凉山二模·★★）C_0 表示生物体内碳 14 的初始质量，经过 t 年后碳 14 剩余质量 $C(t)=C_0(\dfrac{1}{2})^{\frac{t}{h}}(t>0,h$ 为碳 14 的半衰期$)$. 现测得一古墓内某生物体内碳 14 含量为 $0.4C_0$，据此推算该生物是距今多少年前的生物（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）. 正确选项是（　　）

（A）$1.36h$　（B）$1.34h$　（C）$1.32h$　（D）$1.30h$

答案：C

解析：由题意，$C_0(\dfrac{1}{2})^{\frac{t}{h}}=0.4C_0$，所以 $(\dfrac{1}{2})^{\frac{t}{h}}=0.4$，解指数方程，可两边取对数，

所以 $\lg(\dfrac{1}{2})^{\frac{t}{h}}=\lg 0.4$，从而 $-\dfrac{t}{h}\lg 2=\lg\dfrac{4}{10}=\lg 4-\lg 10=2\lg 2-1$，故 $t=\dfrac{1-2\lg 2}{\lg 2}h\approx\dfrac{1-2\times 0.301}{0.301}h\approx 1.32h$.

8.（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）（多选）噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量噪声的强度，定义声压级 $L_P=20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB

燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1， p_2， p_3，则（　　）

（A） $p_1 \ge p_2$　　（B） $p_2 > 10p_3$　　（C） $p_3 = 100p_0$　　（D） $p_1 \le 100p_2$

答案： ACD

解析： 因为我们要比较的是 p_1， p_2， p_3 的一些大小情况，所以先由所给等式解出 p，

由题意， $L_P = 20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$，所以 $\dfrac{L_P}{20} = \lg\dfrac{p}{p_0}$，从而 $\dfrac{p}{p_0} = 10^{\frac{L_P}{20}}$，故 $p = p_0 10^{\frac{L_P}{20}}$ ①，

A 项，由式①可以看到， L_P 越大，则 p 也越大，

由表中数据可知燃油汽车的声压级 L_P 大于等于混合动力汽车的声压级，所以 $p_1 \ge p_2$，故 A 项正确；

B 项，由表中数据可知 $p_0 10^{\frac{50}{20}} \le p_2 \le p_0 10^{\frac{60}{20}}$，

所以 $100\sqrt{10}p_0 \le p_2 \le 1000p_0$ ①，

又 $p_3 = p_0 10^{\frac{40}{20}} = 100p_0$，所以 $p_2 \le 10p_3$，故 B 项错误，C 项正确；

D 项，由表中数据可知 $p_0 10^{\frac{60}{20}} \le p_1 \le p_0 10^{\frac{90}{20}}$，

所以 $1000p_0 \le p_1 \le 10000\sqrt{10}p_0$，

而由①可得 $10000\sqrt{10}p_0 \le 100p_2 \le 100000p_0$，

所以 $p_1 \le 100p_2$，故 D 项正确.